Wir starten mit folgender Ausgangsgleichung

$$f(x_1, x_2) = x_1^5 - 6x_1^3 \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2^4$$

Zuerst die partielle Ableitung erster Ordnung

abgeleitet nach x1: $f_{x_1}(x_1, x_2) = 5x_1^4 - 6 \cdot 3x_1^2 \cdot x_2^2 - 1 \cdot x_2^4$

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 5x_1^4 - 18x_1^2 x_2^2 - x_2^4$$

abgeleitet nach x2: $f_{x_2}(x_1, x_2) = -6x_1^3 \cdot 2x_2 - x_1 \cdot 4x_2^3$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = -12x_1^3 x_2 - x_1 \cdot 4x_2^3$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = -12x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^3$$

Jetzt kommt die partielle Ableitung zweiter Ordnung.

Wir nehmen die berechneten Gleichungen von oben für die weitere Berechnung.

$$f_{x_1}(x_1, x_2) = 5x_1^4 - 18x_1^2 x_2^2 - x_2^4$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) = -12x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2^3$$

Zur Schreibweise: der 1.Index gibt die Gleichung an, in der wir uns befinden (beim Ableiten) und der 2.Index gibt die Variable an, nach der abgeleitet werden muss.

Fangen wir an, mit der Ableitung erster Ordnung nach x1 und leiten diese abermals ab:

Ausgangsgleichung: $f_{x_1}(x_1, x_2) = 5x_1^4 - 18x_1^2 x_2^2 - x_2^4$

abgeleitet nach x1: $f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = 5 \cdot 4x_1^3 - 18 \cdot 2x_1 \cdot x_2^2$

$$f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) = 20x_1^3 - 36x_1 x_2^2$$

abgeleitet nach x2: $f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = -18x_1^2 \cdot 2x_2 - 4x_2^3$

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = -36x_1^2 x_2 - 4x_2^3$$

Jetzt nehmen wir die andere Gleichung zur Hand und leiten ab:

Ausgangsgleichung: $f_{x2}(x_1, x_2) = -12x_1^3x_2 - 4x_1x_2^3$

abgeleitet nach x1: $f_{x2x1}(x_1, x_2) = -6 \cdot 3x_1^2 \cdot 2x_2 - 1 \cdot 4x_2^3$

$$f_{x2x1}(x_1, x_2) = -18x_1^2 \cdot 2x_2 - 4x_2^3$$

$$f_{x2x1}(x_1, x_2) = -36x_1^2x_2 - 4x_2^3$$

abgeleitet nach x2: $f_{x2x2}(x_1, x_2) = -6x_1^3 \cdot 2 \cdot 1 - x_1 \cdot 4 \cdot 3x_2^2$

$$f_{x2x2}(x_1, x_2) = -12x_1^3 - 12x_1x_2^2$$

Und das war es auch schon! Jetzt haben wir alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die ursprüngliche Gleichung berechnet.